

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

¹Д.Н. Низомов, ²И.К. Каландарбеков, ²И.И. Каландарзода, ²Д.Д. Джурахонзода, ²А. Амруллох

¹Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, Душанбе, Таджикистан

²Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими, г. Душанбе, Республика Таджикистан

В статье изложен обзор литературы по моделированию конструкций многоэтажных зданий. Рассмотрен анализ различных методов моделирования конструкций. Показано, что теория подобия, в свою очередь, обеспечивает обоснованность переноса и позволяет использовать данные модельных испытаний для анализа поведения натурных конструкций. Проведение модельных испытаний даёт возможность достаточно точно определить динамические характеристики проектируемой конструкции и при необходимости внести корректировки на стадии проектирования. В качестве примера рассмотрено моделирование динамической задачи балки. Рассмотрены свободные колебания балки с прямоугольным поперечным сечением и равномерно распределённой массой.

Ключевые слова: моделирование, модель, механическое моделирование, физическое моделирование, математическое моделирование, теории подобия, дифференциальное уравнение, критерии подобия.

МОДЕЛСОЗӢ ВА ПРИНЦИПҲОИ НАЗАРИЯИ МОНАНДӢ

¹Д.Н. Низомов, ²И.Қ. Қаландарбеков, ²И.И. Қаландарзода, ²Д.Д. Чурахонзода, ²А. Амруллох

¹Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ, Душанбе, Таджикистан

²Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ, ш. Душанбе, Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақола маводи адабиёт оиди моделсозии конструкцияҳои биноҳои бисёршӯна оварда шудааст. Таҳлили методҳои гуногуни моделсозии конструкцияҳо дида баромада шудааст. Нишон дода шудааст, ки назарияи монандӣ дар навбати худ асоснокӣ гузаронидан ва имконияти истифодабарии маълумотҳои санҷиши моделӣ барои таҳлили рафтори конструкцияҳои асли истифода бурда шаванд. Гузаронидани санҷишҳои моделӣ имконият медиҳад, ки характеристикаҳои динамикии конструкцияҳои тарҳрезшавандаро бо дақиқии кофӣ муайян карда, дар ҳолати зарурӣ дар марҳилаи тарҳрезӣ ислоҳот ворид намоянд. Ҳамчун мисол моделсозии масъалаҳои динамикии болор дида баромада шудааст. Лаппиши озоди болор бо буриши кундалангии росткунча ва массаи мунтазам тақсимшуда дида баромада шудааст.

Калидвожаҳо: моделсозӣ, модел, моделсозии механикӣ, моделсозии физикӣ, моделсозии математикӣ, назарияи монандӣ, муодилаҳои дифференциалӣ, меъёрҳои монандӣ.

MODELING AND PRINCIPLES OF SIMILARITY THEORY

D.N. Nizomov, I.K. Kalandarbekov, I.I. Kalandarzoda, D.D. Jurahonzoda, A. Amrulloh

¹Institute of Geology, Earthquake Engineering, and Seismology, National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan

²Tajik Technical University named after Academician M.S. Osimi, Dushanbe, Tajikistan

The article presents a literature review on the modeling of multi-storey building structures. An analysis of various methods for modeling structures is considered. It is shown that the theory of similarity, in turn, ensures the validity of data transfer and allows the use of model test data for analyzing the behavior of full-scale (prototype) structures. Conducting model tests makes it possible to determine the dynamic characteristics of the designed structure with sufficient accuracy and, if necessary, to make corrections at the design stage. As an example, the modeling of a dynamic beam problem is considered. Free vibrations of a beam with a rectangular cross-section and uniformly distributed mass are examined.

Keywords: modeling, model, mechanical modeling, physical modeling, mathematical modeling, similarity theory, differential equation, similarity criteria.

Введение

Процесс моделирования основывается на принципе аналогии между реальным объектом и его моделью. При этом свойства исходной системы переносятся на модель с использованием определённых правил, допущений и предположений. Таким образом, модель можно рассматривать как результат отображения структуры одной системы на другую [12].

Моделирование также рассматривается как процесс сопоставления и анализа результатов исследования модельных и натурных объектов на основе принципов подобия. Моделирование представляет собой процесс создания модели, предназначенной для воспроизведения наиболее существенных характеристик и закономерностей исследуемого объекта. По определению Леонида Ивановича Седова, моделирование понимается как замена исследования интересующего явления в реальных условиях изучением аналогичного процесса на модели, которая может иметь меньший

или больший масштаб и исследуется в специально организованных лабораторных условиях. Иными словами, основная идея моделирования заключается в том, что результаты экспериментов, выполненных на модели, позволяют получать необходимые сведения о характере протекания явления, а также определять различные параметры и эффекты, которые проявляются в натурных условиях.

Виды моделирования

Моделирование строительных конструкций можно подразделить на несколько основных видов.

Механическое моделирование - это выполненная в определённом масштабе модель по отношению к реальному объекту с сохранением основных свойств и характеристики оригинала.

Физическое моделирование включает методы, основанные на применении аналогии между уравнениями, которые описывают различные физические процессы и явления. Физическое моделирование представляет собой более общее, включая и механическое моделирование.

Математическое моделирование базируется на разработке специализированных вычислительных алгоритмов и программных средств, позволяющих описывать поведение исследуемых конструкций и проводить численные эксперименты с целью анализа их работы.

Механические процессы моделируются при учёте некоторых главных условий, которые основываются на трёх основных теоремах подобия [4-7]. В этом случае модель и натура должны иметь геометрическое подобие. Одной и той же системой уравнений как в модели, так и в оригинале, которые представляются в безразмерном виде, должны описываться механические процессы. Входящие в эти уравнения безразмерные параметры как для модели, так и для реального объекта обязательно имеют одинаковые численные значения. Следует подчеркнуть, что записанные в безразмерном виде начальные и граничные условия для обоих объектов должны полностью соответствовать друг другу.

Широкое применение во многих областях науки и техники, в частности при исследовании железобетонных конструкций, получили теории подобия и методы физического моделирования [8-12]. При проектировании и возведении сооружений различного назначения, в частности при внедрении новых конструктивных решений, с целью повышения их сейсмостойкости используется физическое моделирование.

Теория подобия составляет основу физического моделирования. Подобие предполагает возможность переноса результатов, полученных при экспериментальном исследовании модели, на реальный объект. Теория подобия, в свою очередь, обеспечивает обоснованность такого переноса и позволяет использовать данные модельных испытаний для анализа поведения натурных конструкций.

Решение подобных задач может осуществляться двумя основными способами: посредством анализа размерностей либо на основе анализа уравнений. Второй способ к определению коэффициентов подобия опирается на вторую теорему подобия и используется в тех случаях, когда исследуемый процесс не имеет строгого или полного математического описания [1-3, 7]

В нашем случае для определения критериев подобия используется второй подход, при котором дифференциальные уравнения приводятся к безразмерной форме. Подобные системы описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений и характеризуются сходными условиями однозначности, включая геометрическое и временное подобие, подобие физических параметров, а также подобие начальных и граничных условий.

С целью проверки достоверности и применимости результатов математического моделирования проводятся экспериментальные исследования, которые относятся к физическому моделированию.

Для корректного проведения подобных исследований необходимо обеспечить ряд условий подобия между моделью и натурным объектом.

Использование методов физического моделирования при изучении динамических характеристик строительных конструкций сооружений является самостоятельным направлением исследований, опирающиеся на принципах механического подобия. Особенность физической

модели заключается в том, что происходящие в ней процессы воспроизводят и отражают основные закономерности, характерные для реального объекта.

Таким образом, при условии подобия физической модели и натурного объекта результаты экспериментальных исследований могут быть пересчитаны на реальные условия с использованием соответствующих констант подобия. Безразмерные параметры подобия, характеризующие соотношение одноимённых величин в модели и оригинале, определяются масштабным соотношением между размерами модели и реального объекта. Достаточно корректное определение динамических характеристик проектируемых конструкций возможно при проведении модельных испытаний и при необходимости можно вести корректировки на стадии проектирования.

Система дифференциальных уравнений, описывающая рассматриваемый процесс, совместно с начальными и граничными условиями образует математическую модель, которая применяется как для описания поведения натурного объекта, так и его физической модели.

Теперь рассмотрим кратко порядок создания физической модели, проведения эксперимента и переноса его результатов на натурную конструкцию, который состоит из следующих этапов:

- определение цель и вида испытаний для формулировки задачи исследования и выбора методики испытаний;
- анализ характеристик реальной конструкции, который включает в себя определение поперечных сечений балок, характеристики бетона и арматуры, шага и диаметра стержней и вычисление внешних нагрузок, действующих на конструкцию;
- перечисление основных величин, необходимых для выявления безразмерных параметров, которые управляют поведением системы;
- определение критериев подобия и формулирование условий подобия, которым должна удовлетворять модель;
- выбор и назначение коэффициентов масштабирования, подбора материала модели и требования к их свойствам;
- изготовление масштабной модели на основе теории подобия и назначение нагрузок;
- проведение испытания модели и получение экспериментальных данных для перехода от результатов модели к натурной конструкции.

Здесь рассмотрен один из методов теории подобия – метод анализа дифференциальных уравнений, который получен на основе принципа Даламбера. Данные уравнения описывают колебательные процессы, возникающие в различных конструкциях. Процесс нормализации выполняется в два этапа. На первом этапе все переменные приводятся к безразмерному виду путём выбора соответствующих масштабных параметров. На втором этапе исходная система уравнений преобразуется в безразмерную форму. Необходимо отметить, что максимальные значения этих безразмерных переменных подбирают, таким образом, чтобы они не превышали единицы [9]. Последовательность выполнения этапов применения теории подобия подробно представлена в работе.

В качестве примера рассмотрим решение динамической задачи балки.

Рассматриваются свободные колебания балки с прямоугольным поперечным сечением и равномерно распределённой массой m (рис. 1). В начальный момент времени центра длины балки получает прогиб величиной δ , после чего балка начинает совершать свободные колебания.

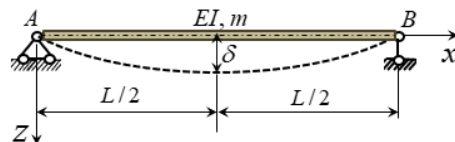


Рисунок 1 - Модель с распределённой массой
Figure 1 – Distributed Mass Model

Дифференциальным уравнением четвёртого порядка описывают свободные колебания балки без учёта затухания.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Начальные и граничные условия задачи представляются в виде

$$t = 0, \quad w|_{x=L/2} = \delta, \quad \partial w / \partial t|_{x=L/2} = 0, \\ x = 0, \quad w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \quad (2)$$

$$x = L, \quad w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0.$$

Безразмерные переменные выберем следующим образом

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_1}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\delta},$$

здесь δ – максимальное смещение (прогиб) в центре балки,

T_1 – время, соответствующее четверти периода свободных колебаний.

Формула (1) с учётом выражения (2) имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = EI \frac{\delta}{L^4} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4}, \quad m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m \frac{\delta}{T_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2}, \\ \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + \pi_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = 0, \quad \pi_1 = \frac{m L^4}{T_1^2 EI}. \quad (3)$$

Радиус инерции сечения балки равен

$$r = \sqrt{I / A},$$

здесь I – момент инерции поперечного сечения балки;

A – площадь поперечного сечения.

Скорость продольной волны определяется из формулы

$$c = \sqrt{E / \rho},$$

тогда параметр подобия π_1 запишется в виде

$$\pi_1 = \frac{m L^4}{T_1^2 EI} = \left| m = \rho A, \quad I = A r^2, \quad E = \rho c^2 \right| = \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)^2. \quad (4)$$

Начальные и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$t = 0, \quad \bar{w}|_{\bar{x}=1/2} = 1, \quad \partial \bar{w} / \partial \bar{t}|_{\bar{x}=1/2} = 0, \\ \bar{x} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \partial^2 \bar{w} / \partial \bar{x}^2 = 0, \quad (5) \\ \bar{x} = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad \partial^2 \bar{w} / \partial \bar{x}^2 = 0.$$

Необходимо отметить, что нормализованные, то есть приведённые к безразмерному виду, начальные и граничные условия не включают параметры подобия. Учитывая принцип подобия между моделью и натурой, свободные колебания которых описывается уравнением (3), записываются так:

$$\pi_{1,m} = \pi_{1,n}, \quad \rightarrow \quad \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)_m = \left(\frac{L^2}{c r T_1} \right)_n, \quad T_{1,n} = T_{1,m} \frac{L_n^2}{L_m^2} \frac{c_m}{c_n} \frac{r_m}{r_n}. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что, получив из эксперимента на модели свободные колебания, без решения дифференциального уравнения можно прогнозировать основной период свободных колебаний натурной балки. Например, если модель выполнена в масштабе 1:4 и изготовлена из того же материала, что и натурная, то использование выражения (6) даёт возможность найти

$$\frac{r_m}{r_n} = \frac{1}{4}, \quad \frac{c_m}{c_n} = 1, \quad \left(\frac{L_n}{L_m} \right)^2 = 16, \quad T_{1,n} = 4T_{1,m}.$$

если модель выполнена в масштабе 1:10 и изготовлена из того же материала, что и реальная, то из выражения (6) имеем

$$\frac{r_m}{r_n} = \frac{1}{10}, \quad \frac{c_m}{c_n} = 1, \quad \left(\frac{L_n}{L_m} \right)^2 = 100, \quad T_{1,n} = 10T_{1,m}.$$

С учётом начальных и граничных условий, изложенных в (5), следует решить дифференциальное уравнение (3) для определения амплитуд свободных колебаний балки.

Вывод

Моделирование, основанное на принципах теории подобия, представляет собой эффективный метод исследования напряжённо-деформированного состояния железобетонных конструкций, особенно в тех случаях, когда проведение натурных испытаний экономически нецелесообразно.

Рецензент: Сангинов А.М. - к.т.н., ведущий научный сотрудник лаборатории сейсмостойкости зданий и сооружений Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Национальной академии наук Таджикистана

Литература

1. Алабужев, П.М. Теория подобия и размерностей. Моделирование. [Текст] / П.М. Алабужев, В.В. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. - М.: Высшая школа, 1968. - 206 с.
2. Баренблатт, Г.И. Анализ размерностей [Текст] / Г.И. Баренблатт. - М.: МФТИ, 1987. - 168 с.
3. Кирпичев, М.В. Теория подобия [Текст] / М.В. Кирпичев. - М.: Изд-во АН СССР, 1953. - 96 с.
4. Кирпичев, М.В. Математические основы теории подобия [Текст] / М.В. Кирпичев, П.К. Конаков. - М.: Изд-во АН СССР, 1949. - 103 с.
5. Клайн, С. Дж. Подобие и приближенные методы [Текст] / С. Дж. Клайн. - М.: «Мир», 1968. - 302 с.
6. Додонов, М.И. Развитие расчётных моделей дисков сборных железобетонных перекрытий при действии на них горизонтальной (ветровой) нагрузки/ М.И.Додонов, Каландарбеков И. // Реферативный журнал «Строительства и архитектура» серия 11, вып. 9, № 4058 Москва, 1983. - 20с.
7. Назаров, А.А. Основы теории подобия и моделирования [Текст] / А.А. Назаров // Терминология. Сборник рекомендуемых терминов/ вып 88. М.: Наука, 1973. - 50с.
8. Низомов, Д.Н. Численное моделирование динамических задач по расчёту зданий с учётом сейсмоизоляции /Д.Н. Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И. Каландарбеков. - Душанбе: «Дониш», 2025.- 286с.
9. Низомов, Д.Н. Моделирование задач строительной механики на основе теории подобия/Д.Н. Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И. Каландарбеков //Доклады НАН Таджикистана. – 2023. Т.66.- № 1-2. - С. 80-88.
10. Низомов, Д.Н. Моделирование сейсмоизолированных зданий на основе теории подобия /Д.Н. Низомов, И.К.Каландарбеков, И.И. Каландарбеков//Известия НАН Таджикистана. Отделение физико - математических, химических, геологических и технических наук. - 2023. - № 1(190). - С. 109-116.
11. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1977. - 440 с.
12. Шаповалов, Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций [Текст] / Л.А. Шаповалов. - М.: Машиностроение, 1990. - 288 с.

Литература

1. Alabuzhev, P.M., Geronimus, V.V., Minkevich, L.M., Shekhovtsov, B.A. Theory of Similarity and Dimensions. Modeling. Moscow: Vysshaya Shkola, 1968, 206 p. (In Russian).
2. Barenblatt, G.I. Dimensional Analysis. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology, 1987, 168 p.
3. Venikov, V.A. Theory of Similarity and Modeling (Applied to Problems of Electric Power Engineering). Moscow: Vysshaya Shkola, 1976, 479 p. (In Russian).
4. Kirpichev, M.V., Konakov, P.K. Mathematical Foundations of the Theory of Similarity. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1949, 103 p. (In Russian).
5. Klein, S.J. Similarity and Approximate Methods. Moscow: Mir Publishers, 1968, 302 p. (In Russian).

6. Dodonov, M.I., Kalandarbekov, I. Development of Computational Models of Precast Reinforced Concrete Floor Disks under Horizontal (Wind) Loads. Abstract Journal "Construction and Architecture", Series 11, Issue 9, No. 4058. Moscow, 1983, 20 p. (In Russian).
7. Nazarov, A.A. Fundamentals of the Theory of Similarity and Modeling. In: Terminology. Collection of Recommended Terms, Issue 88. Moscow: Nauka, 1973, 50 p. (In Russian).
8. Nizomov, D.N., Kalandarbekov, I.K., Kalandarbekov, I.I. Numerical Modeling of Dynamic Problems for Structural Analysis of Buildings Considering Seismic Isolation. Dushanbe: Donish, 2025, 286 p. (In Russian).
9. Nizomov, D.N., Kalandarbekov, I.K., Kalandarbekov, I.I. Modeling of Structural Mechanics Problems Based on the Theory of Similarity. Reports of the National Academy of Sciences of Tajikistan. 2023, Vol. 66, No. 1–2, pp. 80–88. (In Russian).
10. Nizomov, D.N., Kalandarbekov, I.K., Kalandarbekov, I.I. Modeling of Seismic-Isolated Buildings Based on the Theory of Similarity. Proceedings of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of Physical-Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences. 2023, No. 1(190), pp. 109–116. (In Russian).
11. Sedov, L.I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. Moscow: Nauka, 1977, 440 p. (In Russian).
12. Shapovalov, L.A. Modeling in Problems of Structural Element Mechanics. Moscow: Mashinostroenie, 1990, 288 p. (In Russian).

**МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФОН- СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ- INFORMATION ABOUT
AUTHORS**

TJ	RU	EN
Низомов Ҷ.Н.	Низомов Дж.Н.	Nizomov J.N.
Доктори илмҳои техникӣ, проф.	Доктор технических наук, проф.	Doctor of technical sciences, professor
ДТТ баноми академик М.С. Осимӣ	ТТУ им. акад. М.С. Осими,	TTU named after Acadtmician M.S. Osimi
E-mail: tices@mail.ru		
0009-0006-5424-4109		
TJ	RU	EN
Қаландарбеков И.	Каландарбеков И.	Kalandarbekov I.
Доктори илмҳои техникӣ, проф.	Доктор технических наук, проф.	Doctor of technical sciences, professor
ДТТ баноми академик М.С. Осимӣ	ТТУ им. акад. М.С. Осими,	TTU named after Acadtmician M.S. Osimi
E-mail: kalandarbekovimomyorbek@gmail.com		
TJ	RU	EN
Қаландарзода И.И.	Каландарзода И.И.	Kalandarzoda I.I.
Номзади илмҳои техникӣ, дотсент	Кандидат технических наук, доцент	Candidate of technical sciences, Assoc. Prof.
ДТТ баноми академик М.С. Осимӣ	ТТУ им. акад. М.С. Осими,	TTU named after Acadtmician M.S. Osimi
E-mail: q.iftikhor@gmail.ru		
0000-0003-4248-179X		
TJ	RU	EN
Ҷурахонзода Д.Ҷ.	Джурахонзода Д.Д.	Jurakhonzoda D.J.
Номзади илмҳои техникӣ	Кандидат технических наук	Candidate of technical sciences
ДТТ баноми академик М.С. Осимӣ	ТТУ им. акад. М.С. Осими,	TTU named after Acadtmician M.S. Osimi
E-mail: disvaliev@mail.ru		
TJ	RU	EN
Амруллоҳ А.	Амруллоҳ А.	Amrulloh A.
Докторанти PhD	Докторант PhD	Doctoral student
ДТТ баноми академик М.С. Осимӣ	ТТУ им. акад. М.С. Осими,	TTU named after Acadtmician M.S. Osimi