УДК: 624.04 DOI: 10.65599/DEED4119

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Иномзода Абдуназар (Дадобоев Абдуназар Иномович)

Политехнический институт Таджикского технического университета им. акад. М.С. Осими в г. Худжанде

В статье рассматривается процесс получения граничных интегральных уравнений, которые применяются для решения двумерных задач теории упругости. Особенность этих уравнений заключается в том, что неизвестными в них являются перемещения или напряжения на контуре исследуемого объекта. После определения этих параметров на следующем этапе вычисляются перемещения и напряжения внутри области. Следовательно, применение метода граничных уравнений на единицу уменьшает размерность задачи.

Ключевые слова: *неограниченное пространство, дифференциальные уравнения, граничные уравнения, фундаментальное решение, дельта функция, поверхностные напряжения.*

МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ КАНОРӢ БАРОИ ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ДУЧЕНАКАИ НАЗАРИЯИ ЧАНДИРӢ

Абдуназар Иномзода (Дадобоев Абдуназар Иномович)

Ин мақола раванди ба даст овардани муодилаҳои интегралии марзиро, ки барои ҳалли масъалаҳои дученакаи назарияи чандирӣ истифода мешаванд, баррасӣ мекунад. Хусусияти фарққунандаи ин муодилаҳо дар он мебошад, ки номаълумҳо ҷойивазкунӣ ё шиддатҳо дар канори объекти тадқиқшаванда мебошанд. Пас аз муайян кардани ин параметрҳо, қадами навбатӣ ҳисоб кардани ҷойивазкунӣ ва шиддатҳо дар дохили домен мебошад. Дар натиҷа, истифодаи усули муодилаи марзӣ андозаи масъаларо як маротиба кам мекунад.

Калимаҳои калидӣ*: фазои бемаҳдуд, муодилаҳои дифференсиалӣ, муодилаҳои марзӣ, ҳалли асосӣ, функсияи делта, шиддати сатҳӣ.*

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

Abdunazar Inomzoda (Dadoboev Abdunazar Inomovich)

This article examines the process of deriving boundary integral equations used to solve two-dimensional problems of elasticity theory. A distinctive feature of these equations is that the unknowns are the displacements or stresses on the contour of the object under study. After determining these parameters, the next step is to calculate the displacements and stresses within the domain. Consequently, using the boundary equation method reduces the problem dimension by one.

Keywords: *unbounded space, differential equations, boundary equations, fundamental solution, delta function, surface stress.*

Введение

Одним из основных методов вычисления граничных уравнений в теории собственных дифференциальных состояний является сведение решения уравнений в виде линейных интегралов к потенциалам, основанное на фундаментальном решении. Этот метод потенциалов, берущий начало в трудах выдающихся немецких математиков прошлого И. Фредгольма и К. Неймана, не утратил своей актуальности и в наши дни. Этот прикладной метод, наряду с другими вычислительными методами, такими как метод разделения переменных и функции источника (метод функций Грина), применяется для данного типа граничных уравнений. Дано пояснение для получения граничных интегральных уравнений, используемых для решения двумерных уравнений теории упругости. Отличительной особенностью этих уравнений является то, что искомыми неизвестными являются перемещения или напряжения на границе жёсткой диафрагмы. Основатели теории потенциала тесно связаны со многими учёными прошлого и настоящего веков, такими как Н. П. Векуа, К. Ф. Гаусс, Д. Гильберт, Д. Грин, Н. М. Гюнтер, П. Г. Л. Дирихле, В. Д. Купрадзе. Применение метода граничных условий для решения задач однослойного и многослойного потенциального типа приводит к интегрированию уравнений. Основную часть вычисления составляет возникновение особого интеграла. В сложившейся ситуации важен подход к работе и выбор её схемы. С развитием строительной механики и вычислительной техники различные приложения численных расчётов стали более точными и чёткими.

Поскольку этот метод граничных уравнений основан на фундаментальном решении дифференциальных уравнений.

Метод граничных уравнений

Граничные интегральные уравнения двумерных задач теории упругости можно получить исходя из тождества Сомильяна [1], полученные на основе теоремы о взаимности работ. Погружаем конечную область $\Omega+\Gamma$ с заданными на поверхности Γ компонентами напряжений и перемещений в неограниченное пространство, которое последовательно загружается единичными силами и описывается дифференциальными уравнениями

$$G_1\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^2}+G_2\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x\partial y}=-\delta(k,p)e_x,$$
$$G_1\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2}+G\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^2}+G_2\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x\partial y}=-\delta(k,p)e_y, \qquad (1)$$

где $u_x^*=u_{xx}^*+u_{xy}^*$, $u_y^*=u_{yx}^*+u_{yy}^*$, $G_1=2G(1-\nu)/(1-2\nu)$, $G_2=G/(1-2\nu)$, $G-$модуль упругости при сдвиге согласно теореме Бетти, получаем

$$\int_\Gamma\left(p_x u_{xx}^*+p_y u_{yx}^*\right)d\Gamma+\int_\Omega\left(\gamma_x u_{xx}^*+\gamma_y u_{yx}^*\right)d\Omega=$$
$$=\int_\Gamma\left(p_{xx}^* u_x+p_{yx}^* u_y\right)d\Gamma+\int_\Omega\delta(p,k)\,u_x d\Omega, \qquad (2)$$

здесь $u_{xx}^*,\dots,p_{yx}^*$ - фундаментальные перемещения и напряжения. С учётом свойств дельта-функция Дирака

$$\delta(p,k)=0 \text{ при } p\neq k,\quad \delta(p,k)=\infty \text{ при } p\neq k,$$
$$\int_\Omega\delta(p,k)u_x(k)\,d\Omega(k)=u_x(p),$$

второй интеграл в правой части будет равняться $u_x(p)$, где точка $p(\xi,\eta)\in\Omega$, тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$u_x(p)=\int_\Gamma\left(p_x u_{xx}^*+p_y u_{yx}^*\right)d\Gamma_k-\int_\Gamma\left(p_{xx}^* u_x+p_{yx}^* u_y\right)d\Gamma_k+$$
$$+\int_\Omega\left(\gamma_x u_{xx}^*+\gamma_y u_{yx}^*\right)d\Omega, \qquad (3)$$

где p_x, p_y-поверхностные напряжения, u_{xx}^*, p_{xx}^*-перемещения и напряжения, возникающие в точке $k(x,y)$ в направлении оси x от действия единичной сосредоточенной силы, действующей по этой же оси, u_{yx}^*, p_{yx}^*-перемещения и напряжения, возникающие в точке $k(x,y)$ в направлении оси y от действия единичной сосредоточенной силы, действующей по оси x. Индекс k в (3) подчеркивает, что переменным интегрирования по контуру являются координаты x, y. Формула (3) определяет перемещения по направлению оси x в точке $p(\xi,\eta)$ внутри области Ω при заданных значениях p_x, p_y, u_x и u_y на контуре, а также объемных сил γ_x и γ_y в области Ω.

Проведя аналогичную процедуру от действия единичной сосредоточенной силы, действующей по оси y, получаем

$$u_y(p)=\int_\Gamma\left(p_x u_{xy}^*+p_y u_{yy}^*\right)d\Gamma_k-\int_\Gamma\left(p_{xy}^* u_x+p_{yy}^* u_y\right)d\Gamma_k+$$
$$+\int_\Omega\left(\gamma_x u_{xy}^*+\gamma_y u_{yy}^*\right)d\Omega. \qquad (4)$$

Граничные интегральные уравнения можно получить из (3) и (4) при предельном переходе, когда точка $p(\xi,\eta)$ устремится к границе Γ, а при этом точка $k(x,y)$ находится на границе. При перемещении точки $p(\xi,\eta)$ к границе интегралы в правой части (3), как несобственные, можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\int_\Gamma p_x u_{xx}^* d\Gamma_k=\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k+\int_{\Gamma_\varepsilon} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k, \qquad (5)$$

где $d\Gamma_k=d\varepsilon=\varepsilon d\varphi$, тогда с учетом $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k=0$ [5,6], получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k = \int_{\Gamma} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} p_x u_{xx}^* d\Gamma_k = 0. \tag{6}$$

В этом простом случае вторая подынтегральная функция эквивалентна первой степени подынтегрального выражения (4). В другом случае, т.е. второй степени подынтегрального выражения интеграла (4), рассматривая базисное решение как нечастный интеграл при выполнении условия Гёльдера [2], получаем [5, 6].

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}\left(p_{xx}^* u_x + p_{yx}^* u_y\right) d\Gamma_k = \int_{\Gamma}\left(p_{xx}^* u_x + p_{yx}^* u_y\right) d\Gamma_k, \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(p_{xx}^* u_x + p_{yx}^* u_y\right) d\Gamma_k = -(c_{xx}u_{xp} + c_{yx}u_{yp}) \tag{8}$$

здесь
$$c_{xx} = 1 - \frac{\omega}{2\pi} - \frac{\sin 2\omega}{8\pi(1-\nu)}, \quad c_{yx} = \frac{\sin^2\omega}{4\pi(1-\nu)}, \tag{9}$$

$\omega-$ внутренний угол края в раасматриваемой области точке $p(\xi,\eta)$, ввиде примера, для гладкой плоской края $\omega = \pi,\ c_{xx} = 0{,}5$ и $c_{yx} = 0.$ Таким образом, с отчетами по остальным частям получаем результат, равный (4).

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma}\left(p_{xy}^* u_x + p_{yy}^* u_y\right) d\Gamma_k = -(c_{xy}u_{xp} + c_{yy}u_{yp}), \tag{10}$$

где
$$c_{yy} = 1 - \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\sin 2\omega}{8\pi(1-\nu)}, \quad c_{xy} = c_{yx} = \frac{\sin^2\omega}{4\pi(1-\nu)}. \tag{11}$$

Таким образом, при переходе точки $p(\xi,\eta)$ к границе области второй интеграл в (3) и (4) понимается в смысле главного значения по Коши, а остальные интегралы в обычном смысле. Следовательно, при $p(\xi,\eta)\in\Gamma$ уравнения (3) и (4) с учетом (5)-(11) преобразуются в граничные интегральные уравнения [3, 4]

$$u_x(1-c_{xx}) - u_y c_{yx} = \int_{\Gamma}\left(p_x u_{xx}^* + p_y u_{yx}^*\right) d\Gamma_k -$$

$$-\int_{\Gamma}\left(p_{xx}^* u_x + p_{yx}^* u_y\right) d\Gamma_k + \int_{\Omega}\left(\gamma_x u_{xx}^* + \gamma_y u_{yx}^*\right) d\Omega, \tag{12}$$

$$-u_x c_{xy} + u_y(1-c_{yy}) = \int_{\Gamma}\left(p_x u_{xy}^* + p_y u_{yy}^*\right) d\Gamma_k -$$

$$-\int_{\Gamma}\left(p_{xy}^* u_x + p_{yy}^* u_y\right) d\Gamma_k + \int_{\Omega}\left(\gamma_x u_{xy}^* + \gamma_y u_{yy}^*\right) d\Omega. \tag{13}$$

Граничные интегральные уравнения (12) и (13) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_{\mathrm{p}} = \int_{\Gamma}\mathbf{U}^*\mathbf{P}_{\mathrm{k}} d\Gamma - \int_{\Gamma}\mathbf{P}^*\mathbf{U}_{\mathrm{k}} d\Gamma + \int_{\Omega}\bar{\mathbf{U}}^*\mathbf{F} d\Omega, \tag{14}$$

где векторы перемещений, поверхностных напряжений и объемных сил представляются в виде

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \ \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Симметричные матрицы коэффициентов, фундаментальных перемещений и напряжений записываются так:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1-c_{xx} & -c_{yx}\\ -c_{xy} & 1-c_{yy}\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}^{*}=\begin{bmatrix}u_{xx}^{*} & u_{yx}^{*}\\ u_{xy}^{*} & u_{yy}^{*}\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}^{*}=\begin{bmatrix}p_{xx}^{*} & p_{yx}^{*}\\ p_{xy}^{*} & p_{yy}^{*}\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$\bar{\mathbf{U}}^{*}$ – матрица фундаментальных решений, компоненты которых соответствуют точкам внутри области Ω, в отличие от матрицы $\mathbf{U}^{*}$, где компоненты перемещений принадлежат границе Γ.

Из решения (14) вычисляют векторы напряжений и перемещений, соответствующие контуру исследуемого объекта, а затем вычисляются перемещения и внутренние усилия в произвольных сечениях внутри области [5-8].

Вывод

Полученное интегральное уравнение позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние для плоских уравнений теории упругости для видимой области жесткой диафрагмы. Система граничных уравнений сводится к алгебраическому уравнению, в котором напряжение и перемещение определяются системой округлений граничных параметров (сплайн-аппроксимации) или преобразований. На следующем этапе определяются перемещения и напряжения внутри области.

Рецензент: Каландарбеков И.К. — д.т.н., профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство» ТТУ им. акад. М.С. Осими.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: «МИР», 1975. – 872 с
2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. -М.: Мир, 1987. - 524с.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. –М.: Наука, 1977, 312с.
5. Низомов Д.Н. Методы граничных уравнений и сплайн-аппроксимаций в решении статических и динамических задач строительной механики// Автореферат дисс. д.т.н.- М., МГСУ, 1999. – 40 с.
6. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ, 2000, 282 с.
7. В. В. Стружанов, Н. В. Бурмашева Теория упругости: основные положения. Екатеринбург Издательство Уральского университета 2020 г. М-во науки и высш. Об разования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 204 с.
8. Лалин, В. В. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях методом граничных элементов / В. В. Лалин, Д. А. Семенов // Вестник Евразийской науки. — 2025. — Т 17. — № 4.

МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФ – СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ – INFORMATION ABOUT AUTHOR

TJ	RU	EN
Иномзода Абдуназар	Иномзода Абдуназар	Inomzoda Abdunazar
Омӯгори калони кафедраи сохтмон	Старший преподаватель кафедры строительства	Senior Lecturer, Department of Construction
Донишкадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С. Осимӣ дар ш. Хуҷанд	Политехнический институт Таджикского технического университета им. акад. М.С. Осими в г. Худжанде	Polytechnic Institute of Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi in Khujand
E –mail: dadaboev61@inbox.ru		