

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

¹Низомов Джаконгир Низомович, ²Иномзода Абдуназар

¹Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ,

²Политехнический институт Таджикского технического университета им. акад. М.С. Осими в г. Худжанде

В данной статье предлагается методика численного решения граничных интегральных уравнений путем сплайн-аппроксимации граничных параметров. Предполагается, что перемещения и напряжения на контуре исследуемого объекта изменяются по определенному закону, соответствующему сплайну нулевого порядка. Численное интегрирование коэффициентов разрешающей системы уравнений выполняется методом Гаусса.

Ключевые слова: сплайн, фундаментальное решение, решение Кельвина, радиус-вектор, метод Гаусса, граничное уравнение, численное интегрирование.

ҲАЛЛИ АДАДИИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРАЛИИ КАНОРӢ БАРОИ МАСЪАЛАИ ДУЧЕНАКАИ НАЗАРИЯИ ЧАНДИ҆Р

Низомов Джаконгир Низомович, Иномзода Абдуназар

Дар ин мақола усули ҳалли рақамии муодилаҳои интегралии марзӣ бо истифода аз тақриби сплайнини параметрои марзӣ пешниҳод карда мешавад. Фарз карда мешавад, ки чойивазқунӣ ва фишорҳо дар контури объекти омӯхташуда мувофиқи қонуни муайянे, ки ба сплайнни тартиби сифр мувофиқат мекунад, тағиیر мёбанд. Интегратсияи рақамии коэффициентҳои системии муодилаҳои ҳалкунанда бо истифода аз усули Гаусс анҷом дода мешавад.

Калимаҳои қалидӣ: сплайн, ҳалли асосӣ, ҳалли Кельвин, вектори радиус, усули Гаусс, муодилаи марзӣ, интегратсияи рақами.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY THEORY

Nizomov Jahongir Nizomovich, Inomzoda Abdunazar

This article proposes a method for the numerical solution of boundary integral equations using spline approximation of the boundary parameters. It is assumed that the displacements and stresses on the contour of the studied object vary according to a certain law corresponding to a zero-order spline. Numerical integration of the coefficients of the resolving system of equations is performed using the Gauss method.

Keywords: spline, fundamental solution, Kelvin solution, radius vector, Gauss method, boundary equation, numerical integration.

Рассмотрим двумерную конечную область в условиях плоской деформации с заданными граничными условиями, которая находится под воздействием внешних сил. Предполагается, что на одну часть границы области заданы перемещения, а на другую ее часть – напряжения. Для такой задачи, где неизвестными являются напряжения на одной части контура и перемещения на другой части, система граничных интегральных уравнений, полученная исходя из тождества Сомильяна [1], представляется в матричной форме

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_p = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{U}}^* \mathbf{F} d\Omega, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 - c_{xx} & -c_{yx} \\ -c_{xy} & 1 - c_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} u_{xx}^* & u_{yx}^* \\ u_{xy}^* & u_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} p_{xx}^* & p_{yx}^* \\ p_{xy}^* & p_{yy}^* \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$c_{yy} = 1 - \frac{\omega}{2\pi} + \frac{\sin 2\omega}{8\pi(1-\nu)}, \quad c_{xy} = c_{yx} = \frac{\sin^2 \omega}{4\pi(1-\nu)},$$

ω – внутренний угол границы в точке $p(\xi, \eta)$, например, для гладкой границы $\omega = \pi$, $c_{xx} = 0,5$ и $c_{yx} = 0$, p_x, p_y – поверхностные напряжения, u_{xx}^* , p_{xx}^* – перемещения и напряжения, возникающие в точке $k(x, y)$ в направлении оси x от действия единичной сосредоточенной силы, действующей по этой же оси,

u_{yx}^*, p_{yx}^* — перемещения и напряжения, возникающие в точке $k(x, y)$ в направлении оси y от действия единичной сосредоточенной силы, действующей по оси x .

Фундаментальное решение системы уравнений (1), определяющее поле перемещений в неограниченной изотропной упругой среде от действия единичных сил e_x и e_y , строится на основе решения Кельвина [2]. Решение Кельвина в условиях плоской деформации можно записать в виде [3]

$$\begin{aligned} u_{xx}^* &= -a \left[(3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_1 \right], \\ u_{xy}^* = u_{yx}^* &= a \cos \beta_1 \cos \beta_2, \\ u_{yy}^* &= -a \left[(3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_2 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $a = 1/8\pi G(1-\nu)$, $r_{pk} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]$ — расстояние между точками $k(x, y)$ и $p(\xi, \eta)$, β_1, β_2 — углы наклона радиус-вектора r_{pk} к осям x и y соответственно в точке $p(\xi, \eta)$. Компоненты напряжений на любой наклонной по отношению к осям x и y площадки, определяемые из условия равновесия призматического элемента, представляются так:

$$\begin{aligned} p_{xx}^* &= -b(c + 2m_1^2) \cos \gamma / r_{pk}, \\ p_{xy}^* &= -b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) + 2m_1 m_2 \cos \gamma] / r_{pk}, \\ p_{xy}^* &= b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) - 2m_1 m_2 \cos \gamma] / r_{pk}, \\ p_{yy}^* &= -b(c + 2m_2^2) \cos \gamma / r_{pk}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$b = 1/4\pi(1-\nu), \quad c = 1 - 2\nu, \quad m_1 = \cos \beta_1, \quad m_2 = \cos \beta_2,$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2,$$

γ — угол наклона между радиус-вектором r_{pk} и нормалью n в точке $k(x, y)$. Следует отметить, что фундаментальные решения (5) получены для условия, когда напряжения на границе бесконечной области равны нулю.

Уравнение (1) с использованием В-сплайна нулевого порядка [4] можно преобразовать к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_1}^{N_1} a_{ij}^* u_{xj} + \sum_{j=n_1}^{N_1} b_{ij} u_{yj} - \sum_{j=n_2}^{N_2} e_{ij} p_{xj} - \sum_{j=n_2}^{N_2} f_{ij} p_{yj} &= \sum_{j=n_3}^{N_3} e_{ij} p_{xj}^0 + \sum_{j=n_3}^{N_3} f_{ij} p_{yj}^0, \\ \sum_{j=n_1}^{N_1} c_{ij} u_{xj} + \sum_{j=n_1}^{N_1} d_{ij}^* u_{yj} - \sum_{j=n_2}^{N_2} g_{ij} p_{xj} - \sum_{j=n_2}^{N_2} h_{ij} p_{yj} &= \sum_{j=n_3}^{N_3} g_{ij} p_{xj}^0 + \sum_{j=n_3}^{N_3} h_{ij} p_{yj}^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где n_i, N_i — номера узлов на контуре с неизвестными перемещениями или напряжениями.

Коэффициенты, входящие в систему уравнений (6), в соответствии с (4)-(5) представляются в виде [3]

$$a_{ij}^* = a_{ij} + 0,5\delta_{ij}, \quad d_{ij}^* = d_{ij} + 0,5\delta_{ij},$$

$$a_{ij} = -b \int_{\Delta S_j} (c + 2m_1^2) \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j, \quad d_{ij} = -b \int_{\Delta S_j} (c + 2m_2^2) \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j,$$

$$b_{ij} = bc \int_{\Delta S_j} \frac{\sin \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j - 2b \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j,$$

$$c_{ij} = -bc \int_{\Delta S_j} \frac{\sin \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j - 2b \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e_{ij} &= -a \int_{\Delta S_j} [(3-4\nu) \ln r_{ij} - m_1^2] ds_j, \\ g_{ij} &= a \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 ds_j = f_{ij}, \quad h_{ij} = -a \int_{\Delta S_j} [(3-4\nu) \ln r_{ij} - m_2^2] ds_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \cos \gamma_{ij} &= n_1 m_1 + n_2 m_2, \quad \sin \gamma_{ij} = m_1 n_2 - m_2 n_1, \quad n_1 = \cos \alpha_1, \quad n_2 = \sin \alpha_1, \\ m_1 &= \cos \beta_1, \quad m_2 = \sin \beta_1, \quad r_{ij} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}, \\ a &= 1/8\pi G(1-\nu), \quad b = 1/4\pi(1-\nu), \quad c = 1-2\nu, \end{aligned}$$

δ_{ij} – символ Кронекера, ΔS_j – длина носителя В-сплайна нулевого порядка, в пределах которого производится интегрирование, γ – угол наклона между радиус-вектором r и нормалью n в точке $k(x, y)$ на границе области, α_1, α_2 – углы наклона нормали n к осям x и y в точке $k(x, y)$, β_1, β_2 – углы наклона радиус-вектора r к осям x и y в точке $p(\xi, \eta)$.

Систему уравнений (6) можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} A & B & -E & -F \\ C & D & -G & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где U_x, U_y, P_x, P_y – векторы искомых перемещений и напряжений, P_x^0, P_y^0 – заданные векторы напряжений на контуре, A, B, C, D – прямоугольные матрицы размера $NE \times NU$, где NE – общее число элементов нулевого порядка, NU – число элементов, где неизвестными являются перемещения, E, F, G, H – прямоугольные матрицы размера $NE \times NP$, где NP – число элементов с неизвестными напряжениями. Так как $NE = NU + NP$, то можно заметить, что квадратная матрица коэффициентов в (9) имеет порядок $2 \times NE$. Прямоугольные матрицы E, F, G, H правой части (9) в общем могут иметь размеры $NE \times NU$.

После решения системы уравнений (9) и определения искомых перемещений и напряжений, соответствующих поверхности рассматриваемого тела Γ , можно перейти ко второму этапу исследования, где определяются перемещений и напряжений в характерных точках внутри области Ω . Компоненты тензора напряжений в точках внутри области тела, находящегося в условиях плоской деформации, выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \frac{2\nu G}{1-2\nu} [\varepsilon_x + \varepsilon_y] = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y], \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \frac{2\nu G}{1-2\nu} [\varepsilon_x + \varepsilon_y] = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x], \\ \sigma_z &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} [\varepsilon_x + \varepsilon_y], \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (10)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Третий этап анализа напряженно-деформированного состояния двумерной задачи теории упругости сводится к вычислению тангенциальных напряжений на контуре тела

$$\sigma_s = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_s + \nu\varepsilon_n], \quad (11)$$

$$\sigma_n = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_n + \nu\varepsilon_s]. \quad (12)$$

Из (12) находим $\varepsilon_n = -\nu \varepsilon_s / (1-\nu) + \sigma_n (1-2\nu) / 2G(1-\nu)$ и, подставив в (11), получаем

$$\sigma_s = (2G\varepsilon_s + \nu\sigma_n) / (1-\nu), \quad (13)$$

где $\varepsilon_s = \partial u_s / \partial s$, u_s – тангенциальное перемещение, положительное направление которого совпадает с направлением оси S в локальной системе координат.

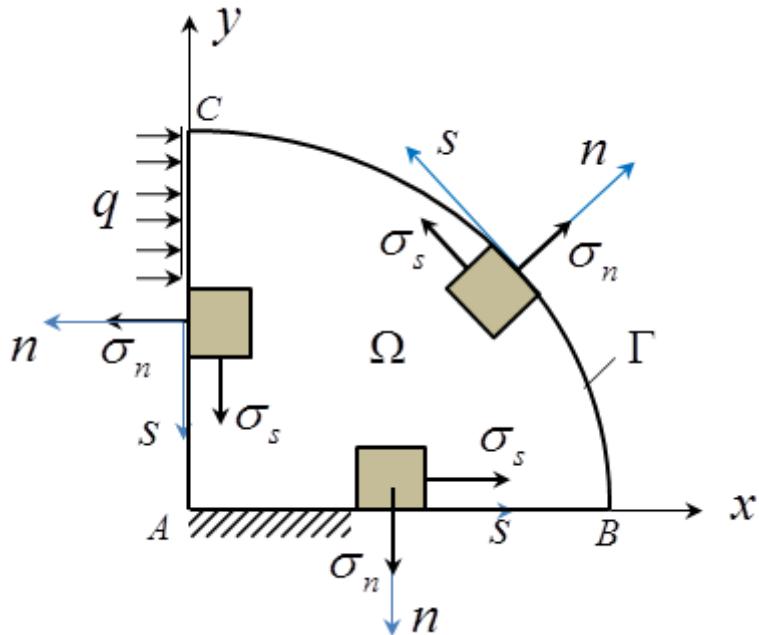


Рисунок 1 – К определению тангенциальных напряжений и перемещений

Численное интегрирование коэффициентов разрешающей системы уравнений (1) методом Гаусса [5] в пределах носителя сплайна нулевого порядка сводится к следующему

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_{xx}^*(x, \xi) d\Gamma_j = \int_{-1}^1 p_{xx}^*(s) ds = \frac{\Delta s_j}{2} \sum_{k=1}^n A_k p_{xx}^*(s_k),$$

$$e_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{xx}^*(x, \xi) d\Gamma_j = \int_{-1}^1 u_{xx}^*(s) ds = \frac{\Delta s_j}{2} \sum_{k=1}^n A_k u_{xx}^*(s_k), \quad (14)$$

где n – число ординат, s_k, A_k – координаты точек интегрирования и их весовые коэффициенты, Δs_j – длина элемента. Остальные коэффициенты в (7) и (8) вычисляются аналогично (14).

Таким образом, разработан алгоритм численного моделирования плоской задачи теории упругости на основе метода граничных интегральных уравнений. Данный алгоритм может быть запрограммирован, и получены результаты численного решения плоской задачи теории упругости при различных воздействиях.

Рецензент: Каландарбеков И.К. — д.т.н., профессор кафедры «Промышленное и гражданское строительство» ППУ им. акад. М.С. Осими.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: «МИР», 1975. – 872 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТ Издательство НКТБ СССР, 1935. – 674 с.
3. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ, 2000, 282 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
5. Демидович Б.П., Морон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
6. В. В. Струженов, Н. В. Бурмашева Теория упругости: основные положения

7. Екатеринбург Издательство Уральского университета 2020 г. М-во науки и высш. Образования Рос. Федерации, Урал. фед. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 204 с.

8. Лалин, В. В. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях методом граничных элементов / В. В. Лалин, Д. А. Семенов // Вестник Евразийской науки. — 2025. — Т 17. — № 4.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ – МАҶЛУМОТ ДАР БОРАИ МУАЛЛИФОН – INFORMATION ABOUT AUTHORS

TJ	RU	EN
Низомов Ҷаҳонғир Низомович	Низомов Джаконгир Низомович	Nizomov Jahongir Nizomovich
д.и.т., профессор, узви вобастаи АМИТ	д.т.н., профессор, член-корр. НАНТ	Doctor of Technical sciences, professor, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Tajikistan
Мудири лабораторияи «Зилзилатобварии бино ва иншоот»-и Институти геология, соҳтмони ба заминчунбӣ тобовар ва сейсмилогияи Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон	Заведующий лабораторией сейсмостойкости зданий и сооружений Института геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии НАНТ	Head of the Laboratory of Seismic Resistance of Buildings and Structures of the Institute of Geology, Earthquake Engineering and Seismology of the National Academy of Sciences of Tajikistan
E-mail: nizomov-jn@mail.ru		
TJ	RU	EN
Иномзода Абдуназар	Иномзода Абдуназар	Inomzoda Abdunazar
Омӯгори калони кафедраи соҳтмон	Старший преподаватель кафедры строительства	Senior Lecturer, Department of Construction
Донишкадаи политехникии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С. Осимӣ дар шаҳри Хӯҷанд	Политехнический институт Таджикского технического университета им. акад. М.С. Осими в г. Худжанде	Polytechnic Institute of Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi in Khujand
E-mail: dadaboev61@inbox.ru		